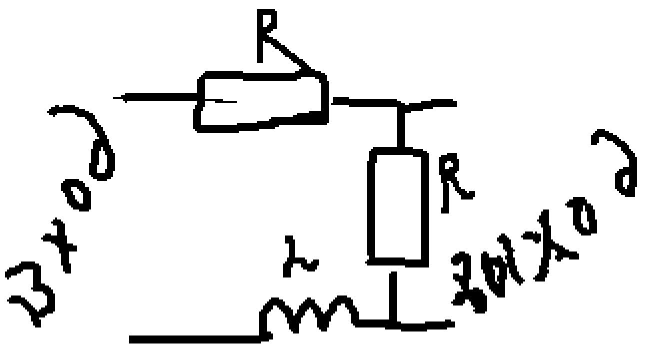
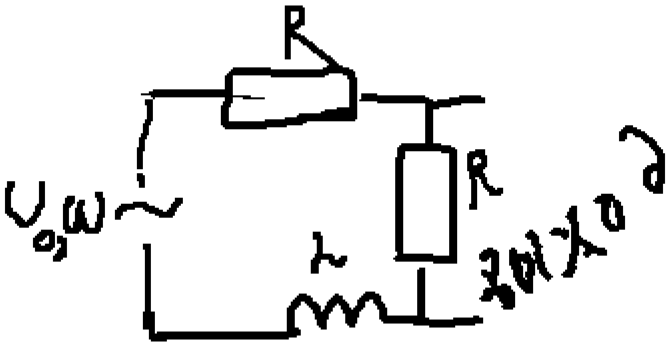


На входе два контакта и на выходе два контакта. Выходные два контакта ведут на вольтметр, а входные – на генератор.

Задача: найти K(ω), g(t), h(t).

Начнём с простого – K(ω). Тут просто требуется аккуратная работа с импедансами.
Если мы считаем K(ω), то на вход подаётся синусоидальное напряжение $U_0\cos(\omega t)$:



Вопрос: а ток через правый резистор такой же, как и верхний? Ответ: да, выходные контакты идут на вольтметр, через который ток не идёт. Так что ток во

всём контуре одинаков:
Алгоритм решения такой задачи:
1) Найти все силы тока (скорее всего, считая импедансы).
2) Зная их, найти напряжение на выходе.
3) Поделив на напряжение на входе, найти K(ω).
Импеданс цепи: R + R + iωL= 2R+ iωL

Ток I в любой момент времени находится из второго закона Кирхгофа (закона Ома для полной цепи): $U_0e^{iwt}=(2R+i\omega L)\boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I}$ – комплексная сила тока, амплитуда * exp(iωt + сдвиг по фазе).

$$I(t)=\frac{U(t)}{2R+i\omega L}=\frac{U_0e^{i\omega t}}{2R+i\omega L}$$

Нас интересуют показания вольтметра, который подключён к резистору 1. Чтобы их узнать, нужно домножить силу тока на сопротивление резстора.

$$U_{1R}(t)=I(t)R=\frac{U_0Re^{i\omega t}}{2R+i\omega L}=\frac{U_0e^{i\omega t}}{2+\frac{i\omega L}{R}}$$

Теперь ищем комплексный коэффициент передачи по формуле:

$$K(\omega)=\frac{U_{вых}(t)}{U_{вх}(t)}=\frac{\left(\frac{U_0e^{i\omega t}}{2+\frac{i\omega L}{R}}\right)}{U_0e^{i\omega t}}=\frac{1}{2+\frac{i\omega L}{R}}$$

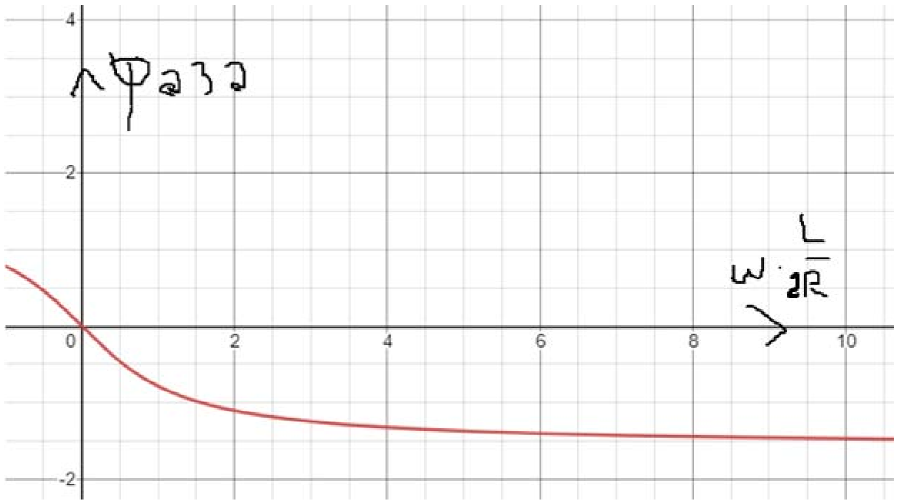
Физический смысл имеет модуль комплексного коэфа передачи и фаза.
Модуль рассчитать легко:

$$\frac{1}{\sqrt{4+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

Это отношение амплитуд напряжений на выходе и входе.
Как мы видим, оно при всех ω будет меньше 1 (если в цепи есть резисторы, оно всегда будет строго меньше, если в цепи только L и C, то может быть равно). Что в-общем-то очевидно в силу энергетических соображений: сигнал не может возрасти по амплитуде, а за счёт резисторов, которые выделяют тепло, он может по амплитуде только уменьшится.
Теперь считаем фазу:

$$\arg\left(\frac{1}{2+\frac{i\omega L}{R}}\right)=-\arg\left(2+\frac{i\omega L}{R}\right)=-arctg\left(\frac{\omega L}{2R}\right)$$

График:



При маленьких частотах катушки роли не играют (ток меняется мееееедленно) и синусоиды на входе и выходе почти синхронные. А вот с ростом омеги уже роли начинает не играть резистор, и фаза становится –π/2.

Теперь перейдём к расчёту переходных и импульсных характеристик.
Способ намбер ван. Зная K(ω), подсчитать интегралы:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \epsilon}\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (\epsilon \to 0)$$

(или же можно сначала найти h(), а для получения g() тупо продифференцировать:

$$g(t) = \frac{d\,h(t)}{dt}.$$

В общем, этот способ – это простое преобразование Фурье.
Способ намбер ту:
Воспользоваться физическим смыслом характеристик.
Переходная характеристика h(t) – это отношение выходного напряжения к входному на установке, где работал Хевисайдов (см. предыдущую методичку).
Тут потребуется решать диффурчики! Как говорил Вятчанин Сергей Петрович, «почему все так любят преобразование Фурье? Где оно, там дифференциальные уравнения заменяются алгебраическими!» Мы же преобразование Фурье не котируем и лучше решим диффурчики.

$$U_{вх}(t) = 2I(t)R + L\frac{dI(t)}{dt}$$

А какое это – $U_{вх}(t)$? До прихода Хевисайдова на установке было всё спокойно и h(t) была нулём. Потом Хевисайдов выкрутил напряжение до некоего напряжения $U_{вх}$ (без аргумента t, т.к. константа).

$$U_{вх} = 2I(t)R + L\frac{dI(t)}{dt}$$

Решением этого дифура относительно будет $I(t)$:

$$I(t) = \tilde{I} \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right) + \frac{U}{2R}$$

Определим константу $\tilde{I}$ с волной из граничных условий: начальный ток 0, тогда

$$I(t) = \frac{U}{2R}\left(1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)\right)$$

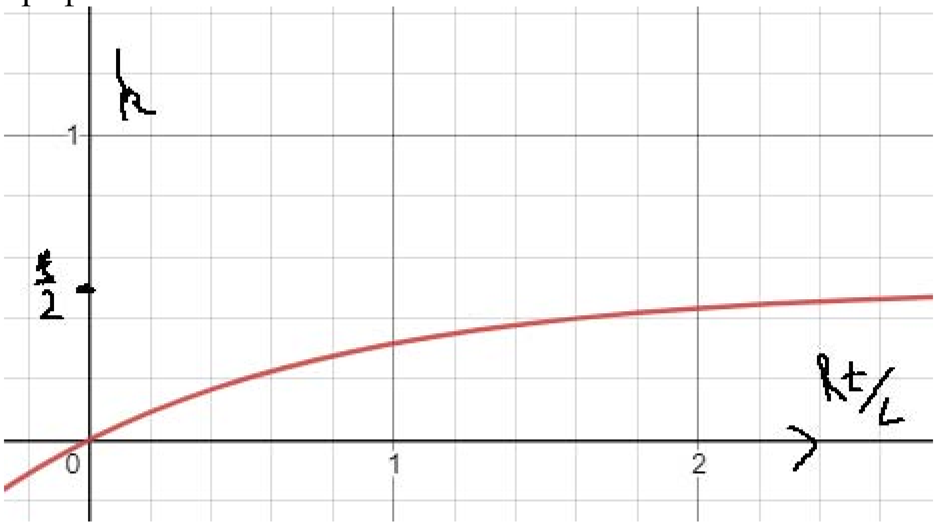
А напряжение на резисторе тогда

$$U_{\text{вх}}(t) = \frac{U}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)\right)$$

Поделив на $U_{\text{вх}}$ – то напряжение, которое разом выставил Хевисайдов, и получим переходную характеристику h(t):

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)\right)$$

График:



Теперь разберёмся с импульсной характеристикой.
Да, её также можно найти через интеграл

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

Но давайте лучше через дифуры.
Можно представить дельта-импульс как импульс конечной амплитуды U, длящейся конечное время τ. Тогда глядя на уже полученный результат

$$I(t) = \frac{U}{2R}\left(1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)\right)$$

Можем сказать, что за время τ действия напряжения U к моменту, когда это напряжение U пропадёт, сила тока будет

$$I(t) = \frac{U}{2R}\left(1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}\tau\right)\right)$$

После чего напряжение на входе пропадает. Придётся опять решать дифурчик.

$$0 = 2I(t)R + L\frac{dI(t)}{dt}$$

Нужно найти I(t) после снятия напряжения на входе. Решаем дифур:

$$I(t) = -\frac{L}{2R}\frac{dI(t)}{dt}$$

$$I(t) = I_{\text{нач}} \exp\left(-\frac{L}{2R}t\right)$$

(здесь мы за нулевой момент времени полагаем момент, когда напряжение на входе вновь становится 0).

Где $I_{\text{нач}}$ – сила тока в момент снятия напряжения со входа. Она равна, как мы уже обсуждали, $\frac{U}{2R}\left(1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}\tau\right)\right)$.

Подставляем $I_{\text{нач}}$ в $I(t)$:

$$I(t) = \frac{U}{2R}\left(1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}\tau\right)\right) \exp\left(-\frac{L}{2R}t\right)$$

Ответ слишком страшный. Давайте его упростим, воспользовавшись малостью τ.

Разложим экспоненту до линейного слагаемого слагаемого:

$$I(t) = \frac{U}{2R}\left(1 - \left(1 - \frac{2R}{L}\tau\right)\right) \exp\left(-\frac{L}{2R}t\right) = \frac{U}{2R} * \frac{2R}{L}\tau * \exp\left(-\frac{L}{2R}t\right)$$
$$= \frac{U\tau}{L} \exp\left(-\frac{L}{2R}t\right)$$

У нас вылезло произведение U * τ. Чтобы получить из обычного прямоугольного сигнала дельта-функцию, нужно будет устремить U к бесконечности, а τ к нулю. А вот их произведение будет постоянно.

Нас интересует напряжение на выходе, т.е. резисторе. Домножим силу тока на сопротивление:

$$U_R(t) = I(t)R = \frac{U\tau}{L} \exp\left(-\frac{L}{2R}t\right)$$

Для переходной характеристики нам на этом шаге надо было всего лишь поделить напряжение на выходе на то, на которое выкрутил Хевисайдов, и получить ответ. В случае импульсной надо соображать.

Распространнёная ошибка: чтобы найти импульсную характеристику, нужно на вход подать сигнал U*δ(t) (где U любое, оно потом сократиться), померить вольтметром, что будет на резисторе и поделить его показания на U (как раз оно сократится). Получим импульсную характеристику.

Ошибка: дельта-функция не безразмерная, она имеет размерность, обратную своему аргументу (в данном случае у неё размерность Гц). Чтобы в этом убедиться, вспомните хотя бы $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$.

В левой части вы δ(t) умножаете на секунды и получаете… безразмерную величину, см. правую часть. Так что δ(t) имеет размерность 1/с.

Правильное рассуждение: чтобы найти импульсную характеристику, нужно на вход подать сигнал U* τ * δ(t) (где U* τ любое, оно потом сократиться), померить вольтметром, что будет на резисторе и поделить его показания на U* τ (как раз оно сократится). Получим импульсную характеристику:

$$\frac{R}{L} \exp\left(-\frac{L}{2R}t\right)$$